**El modelo de Ising**

Si los píxeles de la imagen x bajo estudio sólo pueden tomar dos colores (blanco y negro, digamos, como en la figura 8.1), x es binario. Normalmente nos referimos a cada píxel xi como primer plano si xi = 1 (negro) y fondo si xi = 0 (blanco). La distribución condicional de un píxel es entonces Bernoulli, con el parámetro de probabilidad correspondiente dependiendo de los otros píxeles. Un paso de simplificación es asumir que es una función del número de píxeles vecinos negros, utilizando, por ejemplo, un enlace logit como (j = 0, 1)

donde ni, j = 􏰂l∈n (i) Ixl = j es el número de vecinos de xi con color j. El modelo de Ising se define luego a través de estos condicionales completos

y la distribución conjunta por lo tanto satisface

donde la suma se toma sobre todos los pares (i, j) de vecinos (ejercicio 8.17). Al inferir sobre β y, por tanto, simular la distribución posterior β, nos enfrentaremos a un obstáculo importante, a saber, que la constante de normalización de (8.4), Z (β), es intratable, excepto para las redes muy pequeñas I, mientras que depende de β. Por lo tanto, no se puede calcular la función de verosimilitud. Introduciremos en la Secta. 8.3 una técnica computacional llamada ABC que está destinada a combatir este mismo problema.

En esta etapa inicial, sin embargo, consideramos que β es conocido y nos enfocamos en la simulación de x en preparación para la inferencia tanto de β como de x dada una versión ruidosa de la imagen, y, como se presenta en la Sección. 8.4.

El enigma computacional de los modelos de Ising es más profundo ya que, debido a la intrincada estructura de correlación del modelo de Ising, no es posible una simulación directa de x, espere en casos muy específicos. Frente a esta dificultad, la comunidad de imágenes desarrolló muy pronto herramientas computacionales que finalmente llevaron en 1984 a la propuesta del gibbs sampler.

La especificación de los campos aleatorios de Markov y, en particular, del modelo de Ising implica que las distribuciones condicionales completas de esos modelos están disponibles en forma cerrada. La estructura local de los campos aleatorios de Markov proporciona una actualización inmediata sitio por sitio para el muestreador de Gibbs:

En esta implementación, el orden de las actualizaciones de los píxeles de I es aleatorio para poder superar posibles cuellos de botella en la exploración de la distribución, aunque esta no es una condición necesaria para que el algoritmo converja. De hecho, cuando se consideran dos píxeles x1 y x2 que están separados por m píxeles, la influencia de un cambio en x1 no se siente en x2 antes de al menos m iteraciones del muestreador Gibbs básico. Por supuesto, si m es grande, la dependencia entre x1 y x2 es bastante moderada, pero esta lenta propagación de cambios es indicativa de una mezcla lenta en la cadena de Markov. Por ejemplo, ver un cambio de color en una región homogénea relativamente grande es un evento de muy baja probabilidad, aunque la distribución de los colores es intercambiable.

Junto con la dinámica lenta inducida por la actualización de un solo sitio, podemos señalar otra ineficiencia de este algoritmo, a saber, que muchas actualizaciones no modificarán el valor actual de x simplemente porque el nuevo valor de xl es igual a su valor anterior. Sin embargo, es sencillo modificar el algoritmo para que solo proponga cambios de valores. La actualización de cada píxel l es entonces un paso de Metropolis-Hastings con probabilidad de aceptación

**Segmentación de imagen**

En esta sección, todavía consideramos las imágenes como objetos estadísticos, pero ahora son "ruidosas" en el sentido de que el color o el nivel de gris de un píxel no se observa exactamente, pero con alguna perturbación (a veces llamado desenfoque como en las imágenes de satélite). El propósito de la segmentación de imágenes es agrupar píxeles en clases homogéneas sin supervisión o definición preliminar de esas clases, basándose únicamente en la coherencia espacial de la estructura.

Esta estructura subyacente de los píxeles "verdaderos" se denota por x, mientras que la imagen observada se denota por y. Ambos objetos xey son matrices, con cada entrada de x tomando un número finito de valores y cada entrada de y tomando valores reales (por conveniencia de modelado en lugar de restricciones de realidad). Por lo tanto, estamos interesados ​​en la distribución posterior de x dada y proporcionada por el teorema de Bayes, π (x | y) ∝ f (y | x) π (x). En esta distribución posterior, la probabilidad, f (y | x), describe el vínculo entre la imagen observada y la clasificación subyacente; es decir, da la distribución del ruido, mientras que el π (x) anterior codifica creencias sobre las propiedades (posibles o deseadas) de la imagen subyacente. Aunque, como en otros capítulos, no podemos proporcionar la historia completa de la segmentación de imágenes bayesianas, se puede encontrar un excelente tutorial sobre el procesamiento de imágenes bayesianas basado en un curso de la escuela de verano en Hurn et al. (2003).

Como se indicó anteriormente, una motivación adecuada para la segmentación de imágenes es el procesamiento de satélites, ya que las imágenes captadas por satélites a menudo se ven borrosas, ya sea debido a inexactitudes en los instrumentos o transmisión o debido a nubes o cobertura de vegetación entre el satélite y el área de interés.

Con el modelo que se está introduciendo, pasamos al tema central, a saber, cómo hacer inferencias sobre la imagen "verdadera", x, dada una imagen ruidosa observada, y. El anterior en x es un modelo de Potts con categorías G,

donde Z (β) es la constante de normalización (intratable, véase la sección 8.3) del modelo de Potts. Dado x, asumimos que las observaciones en y son variables aleatorias normales independientes,

Este modelo no es exacto ya que las yi son niveles de gris enteros que varían entre 0 y 255, pero es más fácil de manejar que una distribución parametrizada en {0,. . . , 255}. Esta configuración recuerda claramente14 a los modelos de Markov mezclados y ocultos de los capítulos 6 y 7 en el sentido de que una estructura de Markov, el campo aleatorio de Markov, solo se observa a través de variables aleatorias indexadas por los estados.

En este problema, los parámetros β, σ2, μ1, ..., μG se suelen considerar parámetros molestos, punto de vista que justifica el uso de previos uniformes como

el último anterior corresponde a un previo uniforme en log σ.

El límite superior de β se analizó en la sección anterior. El orden de los μg no es necesario, estrictamente hablando, pero evita el fenómeno de cambio de etiqueta discutido en la Sección 6.5. (La alternativa es usar el mismo uniforme antes en todos los μg y luego reordenarlos una vez que se realiza la simulación MCMC. Si bien esto puede evitar comportamientos de convergencia lenta en algunos casos, esta estrategia también implica una contabilidad más complicada y mayores requisitos de almacenamiento. . En el caso de imágenes grandes, simplemente no se puede considerar.)